9η Άσκηση στα Μαθηματικά Προσανατολισμού της Β΄ Λυκείου

2022-2023

Γενική άσκηση στις ευθείες (Κεφάλαιο 3)

Έστω η εξίσωση γραμμής $(C):\left[(x-2y)\lambda-y\right]^2+4\lambda=\lambda^2+4$ με $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η (C) παριστάνει για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ τις ευθείες $\varepsilon_1:\lambda x-(2\lambda+1)y-(\lambda-2)=0$ και $\varepsilon_2:\lambda x-(2\lambda+1)y+\lambda-2=0$.

β) Να βρείτε την απόσταση των $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$.

γ) Αν η ε_1 είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\delta}=(\lambda,3-6\lambda)$ τότε να βρείτε τις δυνατές τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$.

δ) Αν $\lambda=1$ τότε, να βρείτε:

i) Την εξίσωση της μεσοπαράλληλης (ζ) των παράλληλων ευθειών $\varepsilon_1,\varepsilon_2$.

ii) Την εξίσωση της ευθείας (η), η οποία είναι παράλληλη στις $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ και τέμνει τους άξονες x΄x και y΄y στα σημεία $M(p,0)$ και $N(0,q)$ αντίστοιχα, με $p,q\in\mathbb{R}$ και $3p-2q=1$.

iii) Την οξεία γωνία που σχηματίζουν η ευθεία (ζ) με την ευθεία $\varepsilon_3:2x-y-1=0$.

iv) Το συμμετρικό του σημείου $\Lambda(1,1)$ ως προς την ευθεία (ζ).

Νίκος Τούντας

Λύση

α) Είναι $(C):\left[(x-2y)\lambda-y\right]^2+4\lambda=\lambda^2+4\Leftrightarrow(x\lambda-2y\lambda-y)^2-\lambda^2+4\lambda-4=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left[x\lambda-(2\lambda+1)y\right]^2-\left(\lambda^2-4\lambda+4\right)=0\Leftrightarrow\left[x\lambda-(2\lambda+1)y\right]^2-(\lambda-2)^2=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left[x\lambda-(2\lambda+1)y-(\lambda-2)\right]\left[x\lambda-(2\lambda+1)y+\lambda-2\right]=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\lambda-(2\lambda+1)y-(\lambda-2)=0$ ή $x\lambda-(2\lambda+1)y+\lambda-2=0$

Θα εξετάσουμε για ποιες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ είναι ευθείες. Έχουμε το σύστημα $\begin{cases}\lambda=0\\2\lambda+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda=0\\\lambda=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$ το οποίο είναι αδύνατο άρα παριστάνουν ευθείες για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

Άρα η εξίσωση παριστάνει τις $\varepsilon_1:\lambda x-(2\lambda+1)y-(\lambda-2)=0$ και $\varepsilon_2:\lambda x-(2\lambda+1)y+\lambda-2=0$

β) Είναι $\varepsilon_1:\lambda x-(2\lambda+1)y-(\lambda-2)=0\Leftrightarrow(2\lambda+1)y=\lambda x-(\lambda-2)$ και $\varepsilon_2:\lambda x-(2\lambda+1)y+\lambda-2=0\Leftrightarrow(2\lambda+1)y=\lambda x+\lambda-2$.

- Αν $2\lambda+1=0\Leftrightarrow\lambda=-\dfrac{1}{2}$ τότε $\varepsilon_1:0=-\dfrac{1}{2}x-\left(-\dfrac{1}{2}-2\right)\Leftrightarrow-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2}=0\Leftrightarrow-x=-5\Leftrightarrow x=5$ και $\varepsilon_2:0=-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}-2\Leftrightarrow-\dfrac{1}{2}x=\dfrac{5}{2}\Leftrightarrow x=-5$.

  Είναι κατακόρυφες ευθείες κα η μεταξύ τους απόσταση είναι $d(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=|5-(-5)|=10$.

- Αν $2\lambda+1\neq0\Leftrightarrow\lambda\neq-\dfrac{1}{2}$ τότε $\varepsilon_1:y=\dfrac{\lambda}{2\lambda+1}x-\dfrac{\lambda-2}{2\lambda+1}$ και $\varepsilon_2:y=\dfrac{\lambda}{2\lambda+1}x+\dfrac{\lambda-2}{2\lambda+1}$.

  Είναι $\lambda_{\varepsilon_1}=\lambda_{\varepsilon_2}=\dfrac{\lambda}{2\lambda+1}$ άρα $\varepsilon_1//\varepsilon_2$. Για $x=0$ στην ε_2 είναι $y=\dfrac{\lambda-2}{2\lambda+1}$ άρα το $A\left(0,\dfrac{\lambda-2}{2\lambda+1}\right)$ είναι σημείο της. Άρα $d(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=d(\varepsilon_1,A)=\dfrac{\left|\lambda\cdot0-\cancel{(2\lambda+1)}\dfrac{\lambda-2}{\cancel{2\lambda+1}}-\lambda+2\right|}{\sqrt{\lambda^2+(2\lambda+1)^2}}=\dfrac{|-\lambda+2-\lambda+2|}{\sqrt{\lambda^2+4\lambda^2+4\lambda+1}}=\dfrac{|-2\lambda+4|}{\sqrt{5\lambda^2+4\lambda+1}}$.

γ) $\vec{\delta}=(\lambda,3-6\lambda)$

1ος τρόπος: Έστω διάνυσμα $\vec{\alpha}=(-2\lambda-1,-\lambda)$ το οποίο είναι παράλληλο στην ε_1 άρα κάθετο στο $\vec{\delta}$.

Άρα είναι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\delta}=0\Leftrightarrow(-2\lambda-1)\lambda-\lambda(3-6\lambda)=0\Leftrightarrow\lambda(-2\lambda-1-3+6\lambda)=0\Leftrightarrow\lambda(4\lambda-4)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow4\lambda(\lambda-1)=0\Leftrightarrow\lambda=0$ ή $\lambda=1$.

2ος τρόπος:

- Αν $\lambda=0$ τότε το διάνυσμα $\vec{\delta}=(0,3)$ είναι κατακόρυφο άρα η ευθεία ε_1 θα πρέπει να είναι οριζόντια. Για $\lambda=0$ είναι $\varepsilon_1:-y+2=0\Leftrightarrow y=-2$.
- Αν $\lambda=-\dfrac{1}{2}$ τότε $\vec{\delta}=\left(-\dfrac{1}{2},6\right)$ και $\varepsilon_1:x=5$ και δεν είναι κάθετη στο διάνυσμα, αφού είναι κατακόρυφη ευθεία ενώ το διάνυσμα δεν είναι οριζόντιο.
- Αν $\lambda\in\mathbb{R}-\left\{0,-\dfrac{1}{2}\right\}$ τότε $\lambda_{\vec{\delta}}=\dfrac{3-6\lambda}{\lambda}$ και $\lambda_{\varepsilon_1}=\dfrac{\lambda}{2\lambda+1}$.

  Είναι $\varepsilon_1\perp\vec{\delta}\Leftrightarrow\lambda_{\varepsilon_1}\cdot\lambda_{\vec{\delta}}=-1\Leftrightarrow\dfrac{\cancel{\lambda}}{2\lambda+1}\cdot\dfrac{3-6\lambda}{\cancel{\lambda}}=-1\Leftrightarrow\dfrac{3-6\lambda}{2\lambda+1}=-1\Leftrightarrow3-6\lambda=-2\lambda-1\Leftrightarrow-4\lambda=-4\Leftrightarrow\lambda=1$

Άρα $\varepsilon_1\perp\vec{\delta}\Leftrightarrow\lambda=0$ ή $\lambda=1$

δ) Για $\lambda=1$ είναι $\varepsilon_1: x-3y+1=0 \Leftrightarrow y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$ και $\varepsilon_2: x-3y-1=0 \Leftrightarrow y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$.

i) Θα είναι $\lambda_\zeta=\lambda_{\varepsilon_1}=\lambda_{\varepsilon_2}=\frac{1}{3}$. Η (ζ) ισαπέχει από τις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$. Έστω $K(x,y)$ σημείο της (ζ), τότε:

$$d(K,\varepsilon_1)=d(K,\varepsilon_2) \Leftrightarrow \frac{|x-3y+1|}{\cancel{\sqrt{1+9}}}=\frac{|x-3y-1|}{\cancel{\sqrt{1+9}}} \Leftrightarrow |x-3y+1|=|x-3y-1| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-3y+1=x-3y-1 \Leftrightarrow 1=-1 \text{ αδύνατη}) \text{ ή } (x-3y+1=-x+3y+1 \Leftrightarrow 2x-6y=0 \Leftrightarrow x-3y=0)$$

Άρα $(\zeta): x-3y=0 \Leftrightarrow y=\frac{1}{3}x$.

ii) Θα είναι $\lambda_\eta=\lambda_{\varepsilon_1}=\lambda_{\varepsilon_2}=\frac{1}{3}$ άρα η (η) είναι της μορφής $y=\frac{1}{3}x+\beta$ με $\beta\in\mathbb{R}$.

Για $x=0$ είναι $y=\beta$ άρα τέμνει τον άξονα y΄y στο $N(0,q)$ με $q=\beta$.

Για $y=0$ είναι $\frac{1}{3}x=-\beta \Leftrightarrow x=-3\beta$ άρα τέμνει τον άξονα x΄x στο $M(p,0)$ με $p=-3\beta$.

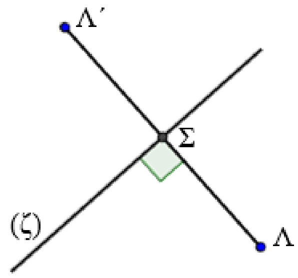
Είναι $3p-2q=1 \Leftrightarrow -9\beta-2\beta=1 \Leftrightarrow -11\beta=1 \Leftrightarrow \beta=-\frac{1}{11}$

Άρα $(\eta): y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{11}$

iii) Έστω το διάνυσμα $\vec{\beta}=(-3,-1)$ το οποίο είναι παράλληλο στην (ζ) και έστω το διάνυσμα $\vec{\gamma}=(-1,-2)$.

Είναι $\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}}\right)=\frac{\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}}{|\vec{\beta}||\vec{\gamma}|}=\frac{3+2}{\sqrt{9+1}\cdot\sqrt{1+4}}=-\frac{5}{\sqrt{50}}=-\frac{5}{5\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}=-\sigma\upsilon\nu(45^o)=\sigma\upsilon\nu(135^o)$

Άρα $\left(\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}}\right)=135^o$ επομένως η οξεία γωνία των ευθείων είναι 45^o.



iv) Έστω Λ΄ το συμμετρικό του Λ ως προς την (ζ).

Είναι $\Lambda\Lambda' \perp \zeta \Leftrightarrow \lambda_{\Lambda\Lambda'}\cdot\lambda_\zeta=-1 \Leftrightarrow \lambda_{\Lambda\Lambda'}=-3$.

Άρα η ΛΛ΄ έχει εξίσωση $y-1=-3(x-1) \Leftrightarrow y=-3x+4$

Έστω το σύστημα $\begin{cases} y=\frac{1}{3}x \\ y=-3x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x+4=\frac{1}{3}x \\ y=-3x+4 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -9x+12=x \\ y=-3x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x=12 \\ y=-3x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{6}{5} \\ y=-\frac{18}{5}+4=\frac{2}{5} \end{cases}$ άρα οι (ζ) και ΛΛ΄ τέμνονται στο $\Sigma\left(\frac{6}{5},\frac{2}{5}\right)$.

Το Σ είναι το μέσο του ΛΛ΄ άρα $x_\Sigma=\frac{x_\Lambda+x_{\Lambda'}}{2} \Leftrightarrow \frac{6}{5}=\frac{1+x_{\Lambda'}}{2} \Leftrightarrow 5+5x_{\Lambda'}=12 \Leftrightarrow 5x_{\Lambda'}=7 \Leftrightarrow x_{\Lambda'}=\frac{7}{5}$ και

$y_\Sigma=\frac{y_\Lambda+y_{\Lambda'}}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{5}=\frac{1+y_{\Lambda'}}{2} \Leftrightarrow 5+5y_{\Lambda'}=4 \Leftrightarrow 5y_{\Lambda'}=-1 \Leftrightarrow y_{\Lambda'}=-\frac{1}{5}$ άρα $\Lambda'\left(\frac{7}{5},-\frac{1}{5}\right)$.